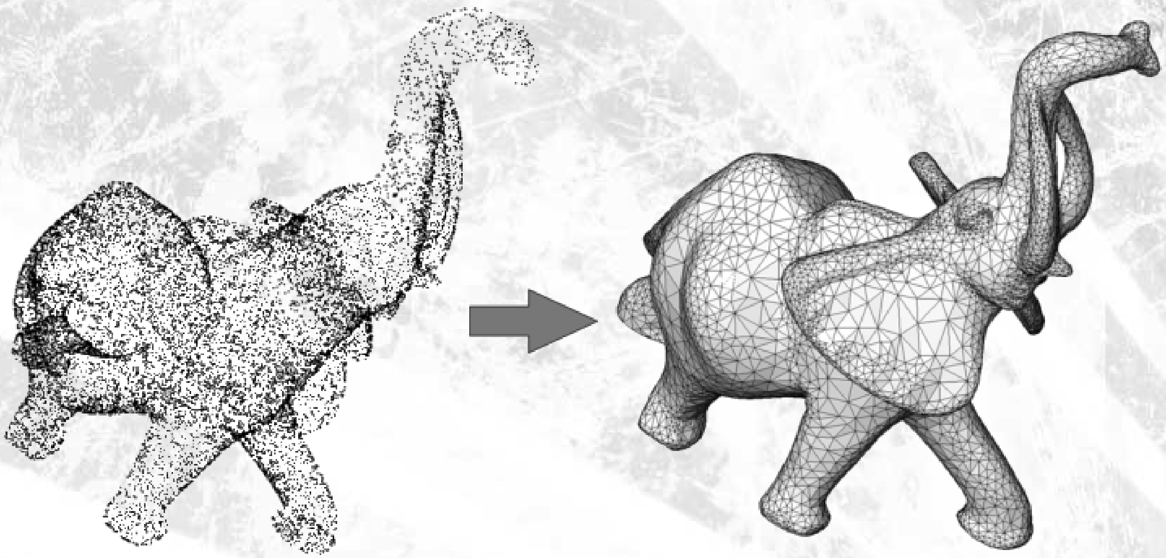
Poisson Reconstruction



Ernesto Azuar Valenzuela
Computación Geométrica

Introducción

A pesar de ser un problema bien estudiado, las técnicas de reconstrucción de superficies a partir de un conjunto de puntos presentan algunos problemas.

La lectura de vóxeles tiene limitaciones prácticas:

- Un nivel apreciable de ruido.
- Restricciones mecánicas hacen que no podamos obtener mucha información de ciertas zonas.

Introducción

Se suelen utilizar distintas familias de algoritmos para resolver el problema:

- Basados en estructuras combinatorias
  - Triangulación de Delaunay
  - Diagramas de Voronoi
  - Formas Alfa
- Aproximaciones sobre funciones implícitas
  - Locales
  - Globales

Introducción

La reconstrucción Poisson combina los beneficios de las aproximaciones globales y locales.

Globales porque: no usa técnicas heurísticas para elegir vecinos.

Locales porque: la función implícita se adapta bien a zonas locales con características propias. Se crea una estructura jerárquica simple que deriva en un sistema lineal disperso, bien condicionado.

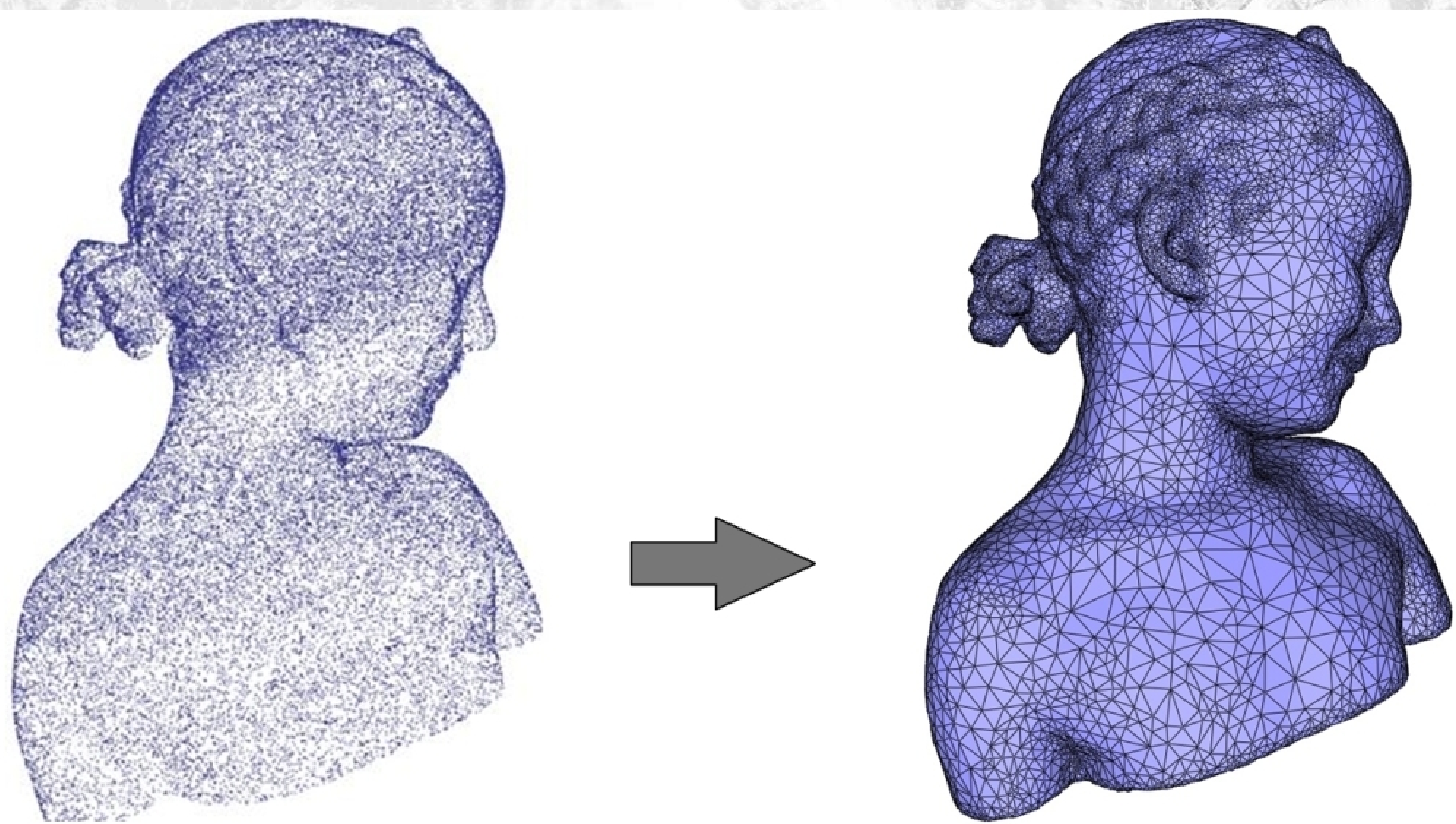
Descripción

Entrada: Conjunto de vóxeles orientados (con una normal).

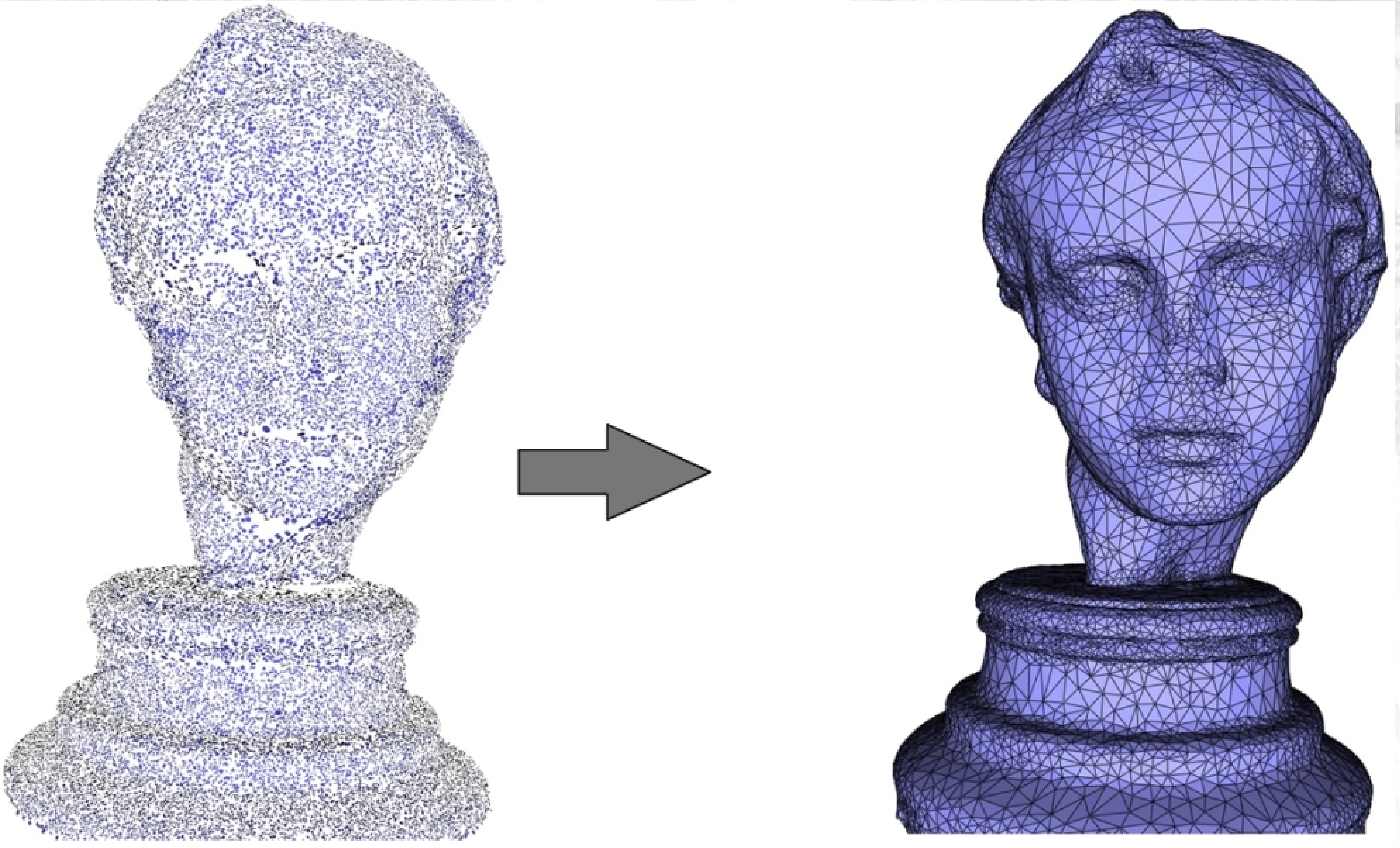
Salida: Superficies de nivel asociadas a la topología del objeto.

Final: A partir de la superficie de nivel podemos usar varios algoritmos para obtener una malla triangulada final.

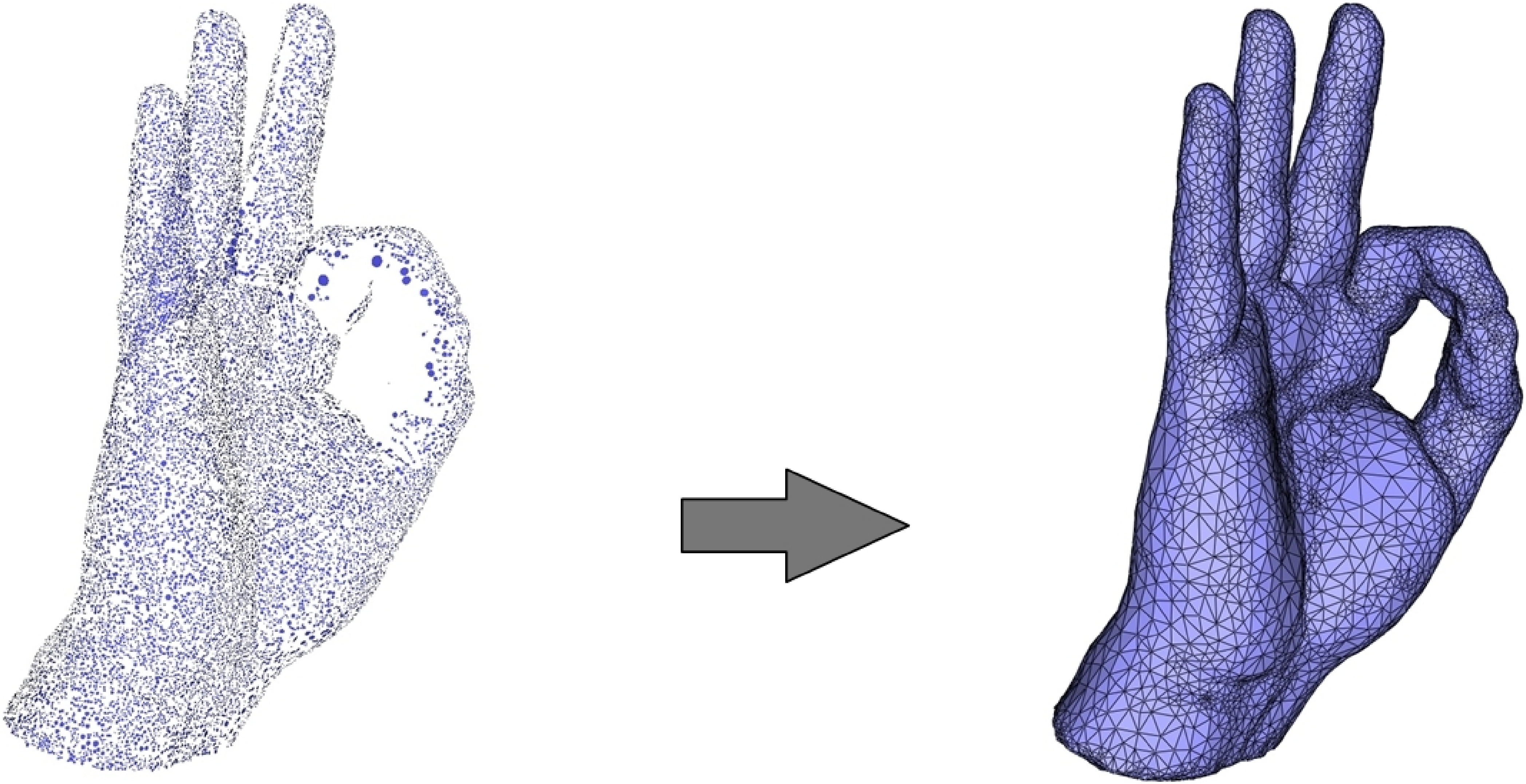
Descripción



Descripción



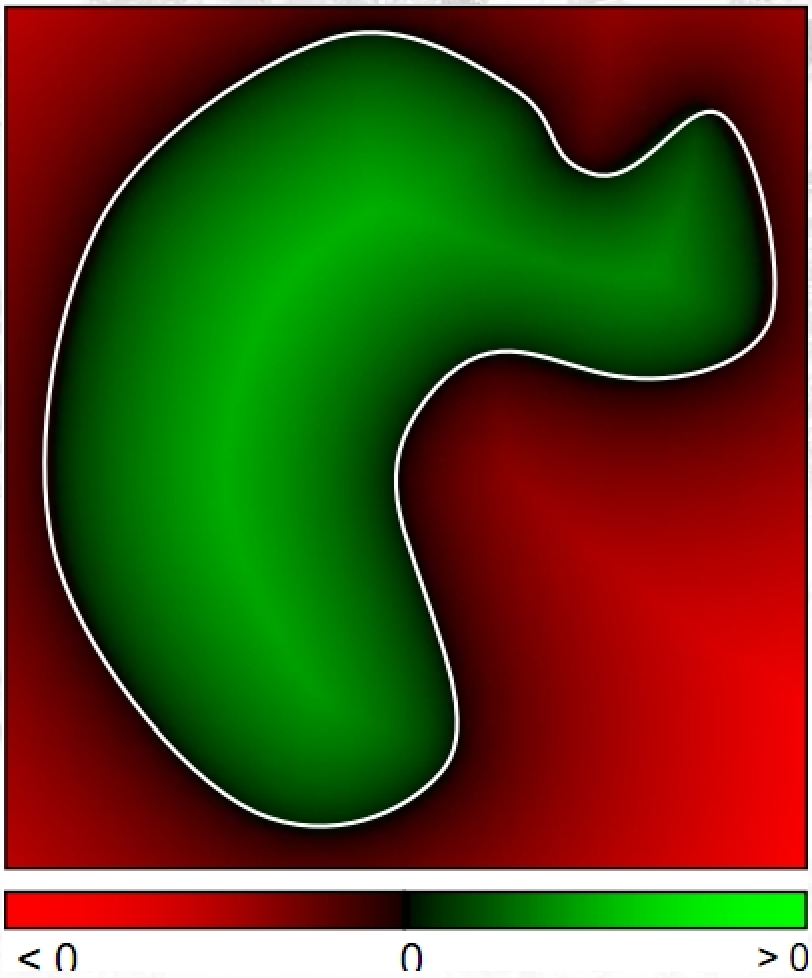
Descripción



Algoritmo

La idea básica es encontrar un función que evalue como mayor que cero los puntos en el interior de la superficie, y como menor los puntos en el exterior.

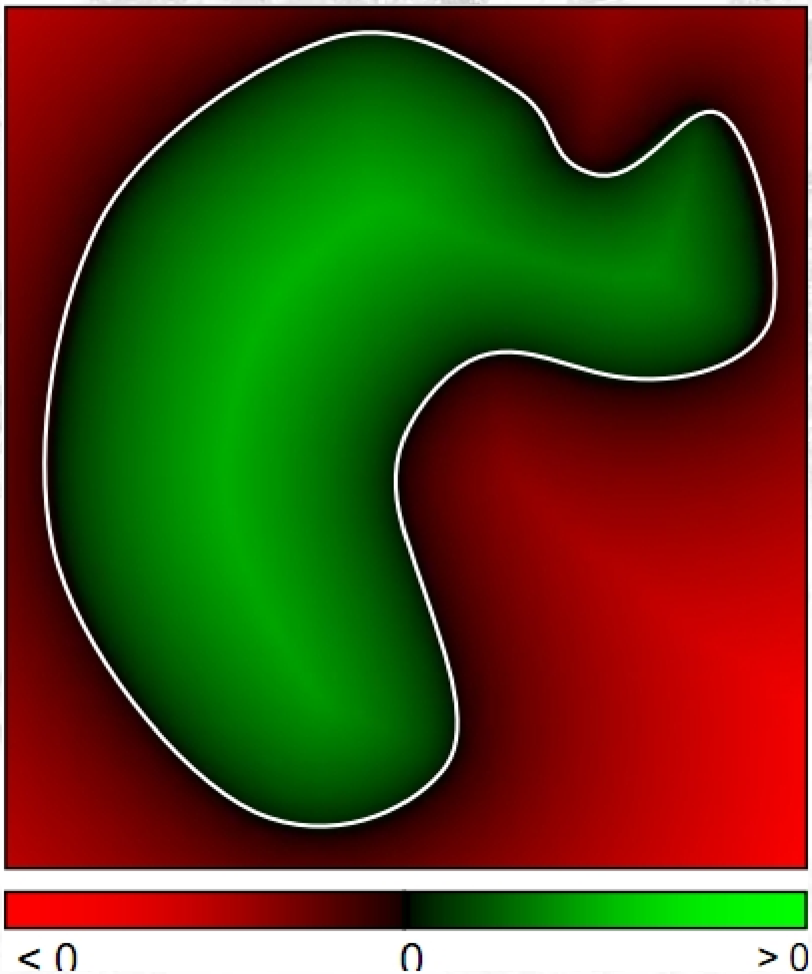
Así podremos extraer las zonas iguales a cero.



Algoritmo

Problema: Los valores de la función indicador pueden ser arbitrariamente altos/bajos.

Aplicaremos un filtro para que la función se evalúe como 1 en el interior y como 0 en el exterior.



Algoritmo

Para encontrar la función: La clave es que hay una relación entre los vóxeles orientados del ejemplo y la función que buscamos.

Específicamente: El gradiente de la función que buscamos es un campo vectorial que vale 0 en todos los puntos excepto en aquellos próximos a la superficie, donde toma el valor de las normales orientadas hacia el interior.

Algoritmo

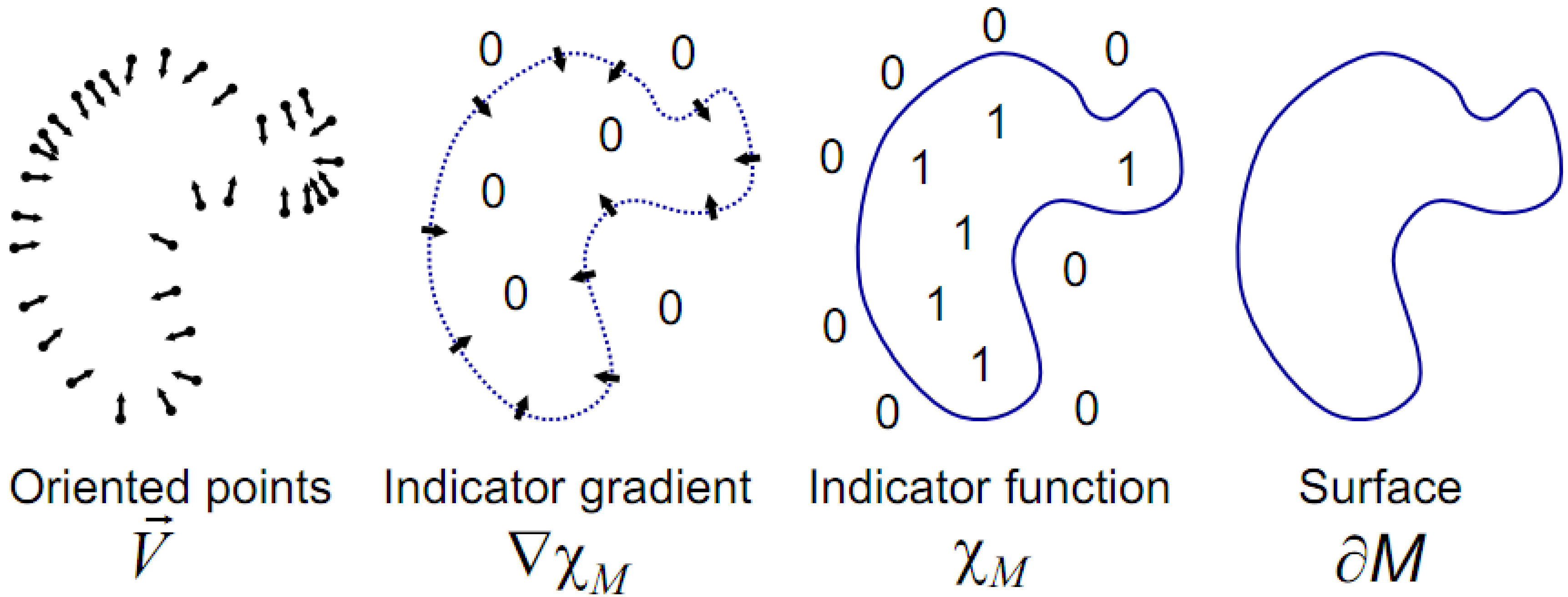


Figure 1: *Intuitive illustration of Poisson reconstruction in 2D.*

Algoritmo

El problema se reduce a encontrar la función escalar cuyo gradiente mejor se aproxime al campo vectorial definido por los ejemplos.

$\mathrm{Min} | \nabla \chi - V |$. Si aplicamos el operador de divergencia transformamos el problema en una ecuación de Poisson estándar.

Es decir, calcular la función escalar χ cuyo laplaciano (divergencia del gradiente) es igual al a la divergencia del campo vectorial V.

$$\Delta \chi \equiv \nabla \cdot \nabla \chi = \nabla \cdot V.$$

Algoritmo

Aclaraciones:

$$\Delta\varphi = f$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(x,y,z) = f(x,y,z).$$

$$\Delta\phi = (\nabla\cdot\nabla)\phi = \nabla^2\phi$$

$$\Delta\mathbf{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

Algoritmo

Para definir el campo vectorial: Definimos el Octree mínimo con la propiedad de que cada punto del ejemplo queda en una hoja.

Por cada nodo del octree definimos una función base:

$$F_o(q) \equiv F\left(\frac{q - o.c}{o.w}\right)\frac{1}{o.w^3}.$$

Algoritmo

Para F nuestra meta es que el campo vectorial quede expresado eficientemente como suma lineal de F base :

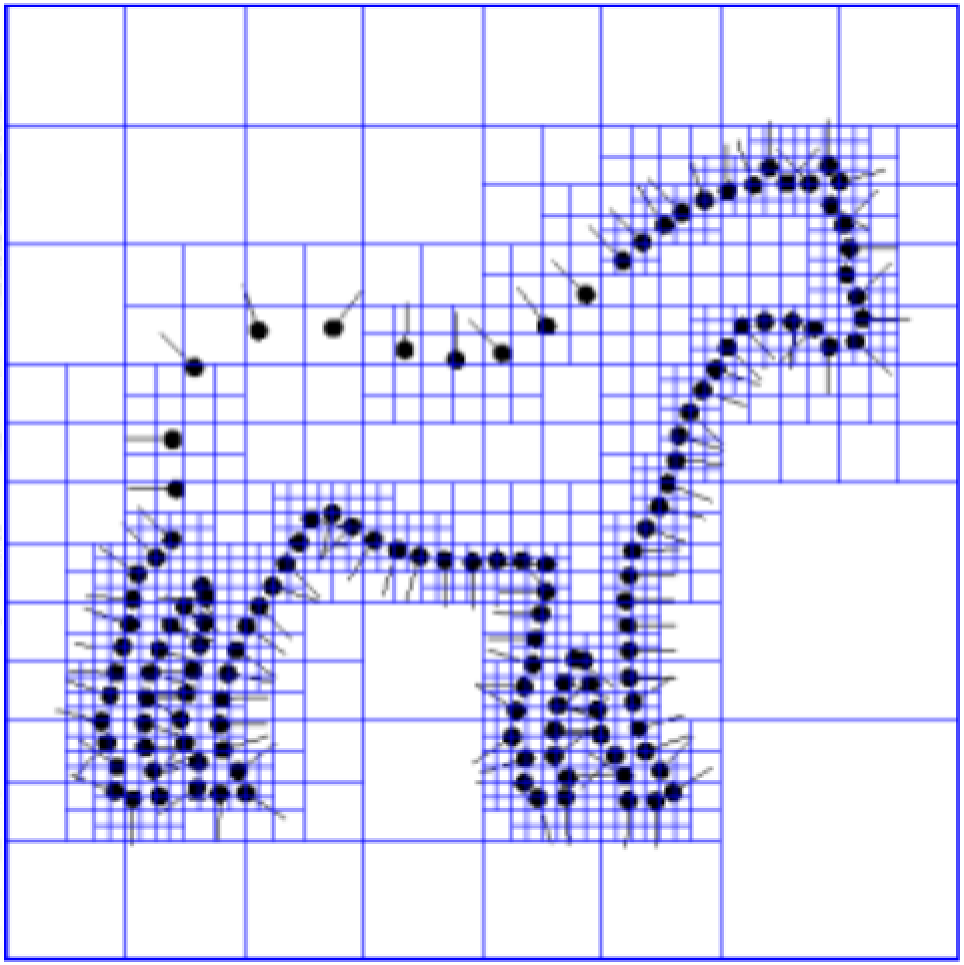
$$F(q) = \tilde{F}\left(\frac{q}{2^D}\right)$$

Con todo esto, podemos definir el campo:

$$\vec{V}(q) \equiv \sum_{s \in S} \sum_{o \in \mathrm{Ngbr}_D(s)} \alpha_{o,s} F_o(q) s.\vec{N}$$

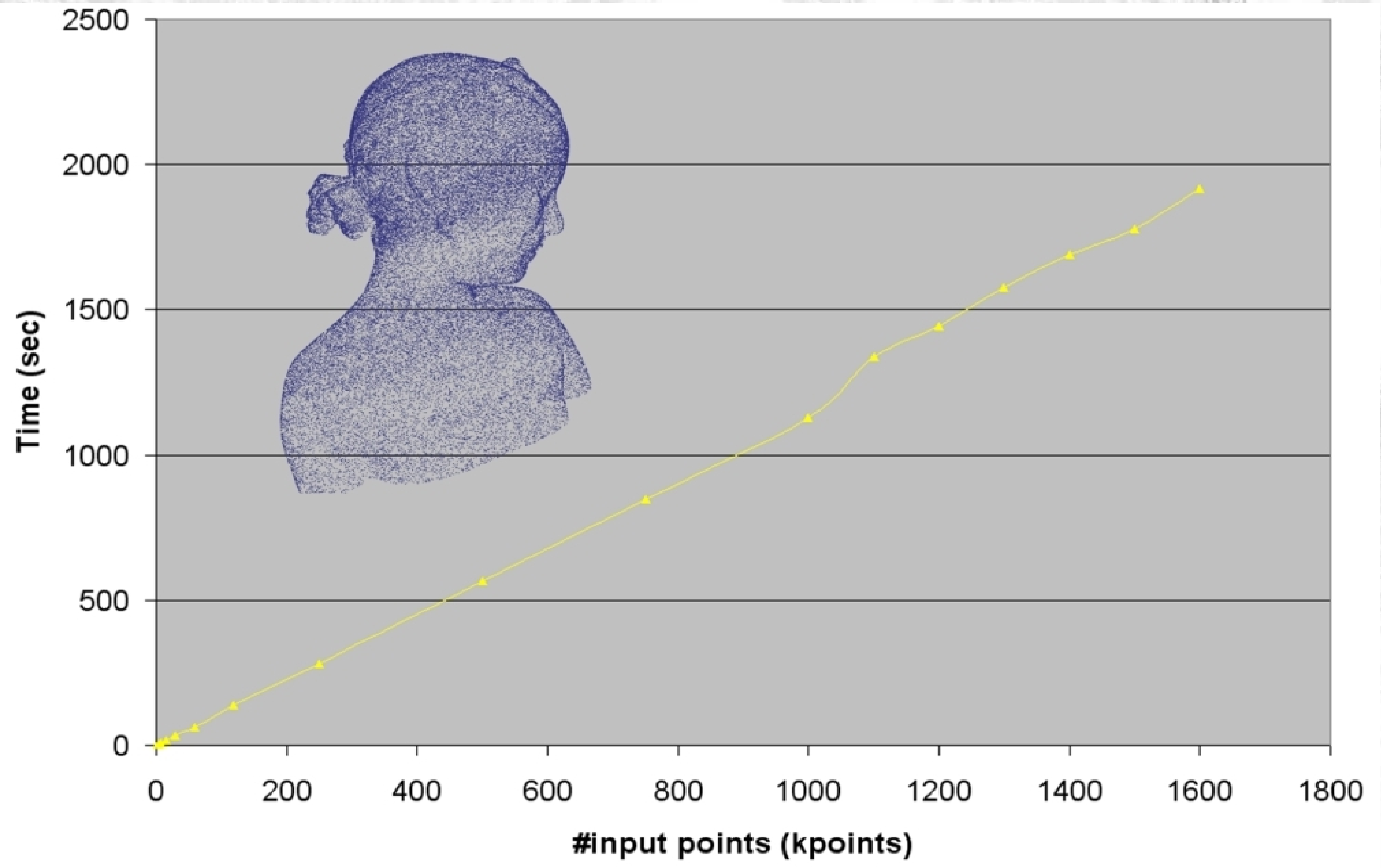
Algoritmo

Ahora tenemos todos los elementos de la ecuación de Poisson. Podemos formar un sistema lineal disperso para resolver los coeficientes que forman la ecuación indicador.



Análisis

En función del número de puntos en la entrada.



Referencias

http://www.cs.technion.ac.il/~cs236329/lectures/pois

http://research.microsoft.com/en-us/um/people/hoppe

http://www.nlpr.ia.ac.cn/English/rv/Weekly%20repor

http://www.cgal.org/Manual/3.5/doc_html/cgal_manual/Surface_reconstruction_points_3/Chapter_main.html